فهرست مطالب

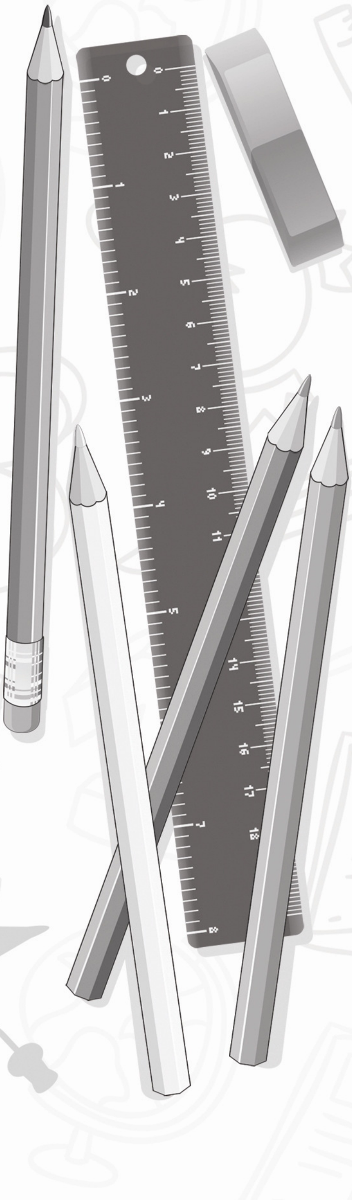
عنوان مطلب | **صفحه**

استعداد تحصیلی ریاضی

فصل اول:

عدد، الگوهای عددی و روابط عددی

- یادآوری عددنویسی
- مجموعه‌ها و الگوهای عددی
- بخش‌پذیری
- اعداد صحیح
- یادآوری عدد و عددنویسی
- مجموعه‌های عددی
- الگوهای عددی
- بخش‌پذیری
- اعداد صحیح
- روابط عددی



یادآوری عدد و عددنویسی

شواهد فراوانی از پیدایش عدد و رقم در نخستین تمدن‌های روی زمین بدست آمده است. این اعداد از نمادهای تصویری آغاز و به شکل کنونی تغییر پیدا کرده‌اند. در ریاضی از صفر تا ۹، ده رقم داریم که تمام عددها از این ارقام تا بی‌نهایت ساخته می‌شوند.

بنابراین بزرگترین و کوچک‌ترین عدد با رقم‌های غیرتکراری فقط ۱۰ رقم دارد.

۹۸۷۶۵۴۳۲۱۰ بزرگ‌ترین عدد با ارقام غیرتکراری

۱۰۲۳۴۵۶۷۸۹ کوچک‌ترین عدد با ارقام غیرتکراری

تعداد اعداد یک رقمی ۹ تا، تعداد اعداد دو رقمی ۹۰ تا، سه رقمی ۹۰۰ تا و ... مشخص است.

توجه به عدد، عددنویسی و عددشناسی همواره در آزمونها و المپیادهای گوناگون از اهمیت بالایی برخوردار است.

بطوریکه در آزمونهای حداقل پنج سال گذشته‌ی تیزهوشان بیش از ۵۰ سؤال در ارتباط با این مبحث طرح شده است.

❑ عدد دو سر جور:

به عددی که از دو طرف به یک صورت خوانده و نوشته شود (از ابتدا و انتها) عدد دو سر جور یا گردشی می‌گویند مانند:

۵۱۴۳۳۴۱۵ یا ۱۰۲۳۲۰۱

❑ مقلوب یک عدد:

چنانچه عددی را از آخر به اول و یا برعکس بنویسیم مقلوب آن عدد را نوشته‌ایم.

مانند: ۵۲۰۳۸ $\xrightarrow{\text{مقلوب آن}}$ ۸۳۰۲۵

بازی با رقم‌ها و اعداد و سؤال‌های مرتبط با آنها از جمله پرسش‌های رایج در دفترچه شماره دو آزمون تیزهوشان بوده و چالش خوبی برای سنجش مهارت‌های سرعت، دقت و توانایی دانش‌آموزان در مبحث اعداد است.

❑ به جدول ارزش مکانی زیر توجه کنید:

طبقه ←	عدد اعشاری			عدد صحیح											
مرتبه ←	هزارم	صدم	دهم				هزار			میلیون			میلیارد		
				ی	د	ص	ی	د	ص	ی	د	ص	ی	د	ص
عدد ←	۸	۳	۰	۵	۰	۱	۰	۰	۰	۳	۹	۰	۰	۲	۴

❑ ارزش مکانی ارقام: در یک عدد، ارزش هر رقم بستگی به مکانی دارد که در آن قرار گرفته است.

❑ ارزش مکانی هر رقم، ده برابرِ اولین رقم سمت راست خودش است.

❑ ارزش مکانی هر طبقه، هزار برابر طبقه‌ی بعد از خودش است.

عددی را که در جدول ارزش مکانی بالا نوشته‌ایم، به حروف بنویسید.

– چهارصد و بیست میلیارد و نود و سه میلیون و یکصد و پنج و سی و هشت هزارم

– بزرگ‌ترین رقم در چه طبقه و مرتبه‌ای قرار دارد؟

– رقم ۹ در طبقه میلیون‌ها و در مرتبه دهگان قرار دارد.

– کوچک‌ترین رقم در چه طبقه و مرتبه‌ای قرار دارد؟

– رقم صفر در چندین طبقه و مرتبه قرار دارد. مثلاً یکان میلیارد، صدگان هزار، ...

یک میلیون به عدد داخل جدول اضافه می‌کنیم، سپس بدون تغییر و جابه‌جایی رقم‌ها، بزرگ‌ترین عدد چهاررقمی که در این عدد بزرگ مشاهده می‌کنید، را به حروف بنویسید.

: نه‌هزار و چهارصد

```
  ۴۲۰,۰۹۳,۰۰۰,۱۰۵/۰۳۸
+           ۱,۰۰۰,۰۰۰
---------------------
  ۴۲۰,۰۹۴,۰۰۰,۱۰۵/۰۳۸
```

«هفتاد و دو هزارم» را به عدد داخل جدول اضافه می‌کنیم، رقم صدم قسمت اعشاری عددِ حاصل کدام است؟

۱) صفر ۲) یک ۳) سه ۴) هفت

: گزینه (۲).

۰/۰۳۸ + ۰/۰۷۲ = ۰/۱۱۰

مجموعه‌های عددی

مجموعه‌های عددی در ریاضی را می‌توان به دسته‌های زیر بصورت کلی تقسیم‌بندی کرد:

مجموعه اعداد طبیعی: در این مجموعه صفر به تنهایی جزو اعداد طبیعی به شمار نمی‌آید چون صفر در طبیعت وجود خارجی ندارد. مثلاً صفر دایناسور در حال عبور است. یا یک موش سرکلاس درس ما حاضر است. هم‌چنین در اعداد طبیعی کسر و اعشار وجود ندارد. نمی‌توان گفت $\frac{۲}{۳}$ یک گنجشک در حال پرواز است.

$N = \{۱,۲,۳,۴,۵,...\}$ مجموعه اعداد طبیعی

❐ زیر مجموعه‌هایی مانند اعداد زوج طبیعی و فرد طبیعی نیز به‌صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$E = \{۲,۴,۶,۸,...\}$ مجموعه اعداد زوج طبیعی

$O = \{۱,۳,۵,۷,۹,...\}$ مجموعه اعداد فرد طبیعی

❑ مجموعه اعداد حسابی: اعداد حسابی اعدادی هستند که در محاسبات به کار رفته و از صفر شروع می‌شوند.

$W=\{۰,۱,۲,۳,...\}$ یا I مجموعه اعداد حسابی

❑ مجموعه اعداد صحیح: به مجموعه اعداد علامت‌دار یعنی علامت‌های + و − اعداد صحیح می‌گویند.

$Z=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,+۱,+۲,+۳,...\}$ مجموعه اعداد صحیح

❑ عدد صفر به تنهایی نه زوج است و نه فرد. بلکه زوج‌ساز است. چنانچه در یکان عددی با رقم‌های زوج یا فرد قرار گیرد آن عدد را به یک زوج تبدیل می‌کند.

یک عدد زوج $۸۰ \leftarrow ۸+۰$ (یک رقم زوج)

یک عدد زوج $۷۰ \leftarrow ۷+۰$ (یک رقم فرد)

❑ مجموعه اعداد گویا: به تمام کسرهایی که صورت و مخرج آنها غیر صفر باشد اعداد گویا می‌گویند.

$Q=\left\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},...\right\}$ مجموعه اعداد گویا

❑ مجموعه اعداد حقیقی: به تمام اعداد دنیا از اعداد طبیعی، حسابی، گویا و ... مجموعه اعداد حقیقی می‌گویند که با حرف R نمایش داده می‌شوند.

الگوهای عددی

❑ از دنباله‌های منظم شروع می‌کنیم. مثلاً «عددهای زوج طبیعی» با دوبرابر کردن عددهای طبیعی به دست می‌آیند:

۲×۱ , ۲×۲ , ۲×۳ , ۲×۴ , ... → ۲,۴,۶,۸ , ... → ۲n (n یعنی عدد دلخواه)

❑ «عددهای فرد طبیعی» از دو برابر کردن عددهای طبیعی منهای یک، به دست می‌آیند:

۲×۱−۱ , ۲×۲−۱ , ۲×۳−۱ , ۲×۴−۱ , ... → ۱,۳,۵,۷ , ... → ۲n − ۱

به عنوان مثال دهمین عدد زوج، ۲۰ است (۱۰×۲) و دهمین عدد فرد ۱۹، (۱ − ۱۰ × ۲)

❑ جدول حاصل «جمع» عددهای زوج و فرد:

جمع	زوج	فرد
زوج	زوج	فرد
فرد	فرد	زوج

❑ جدول حاصل «تفریق» عددهای زوج و فرد:

تفریق	زوج	فرد
زوج	زوج	فرد
فرد	فرد	زوج

❑ جدول حاصل «ضرب» عددهای زوج و فرد:

ضرب	زوج	فرد
زوج	زوج	زوج
فرد	زوج	فرد

❏ فرض کنید عدد فرد را «ف» و عدد زوج را با «ز» نشان دهیم، در این صورت به الگوهای زیر توجه کرده و نتایج به دست آمده را به یاد بسپارید.

نتیجه‌گیری ۱:

هر تعدادی عدد زوج را در هم ضرب کنیم،
حاصلضرب آن‌ها همواره عددی زوج است.

ز × ز → ز
ز × ز × ز → ز
ز × ز × ز × ز → ز
ز × ز × ز × ز × ز → ز
⋮

نتیجه‌گیری ۲:

هر تعدادی عدد فرد را در هم ضرب کنیم،
حاصلضرب آن ها همواره عددی فرد است.

ف × ف → ف
ف × ف × ف → ف
ف × ف × ف × ف → ف
ف × ف × ف × ف × ف → ف
⋮

کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) مجموع ۱۳۹۵ تا عددِ زوج، یک عدد زوج است.
۲) مجموع ۱۳۹۶ تا عددِ زوج، یک عددِ زوج است.
۳) حاصل‌ضرب ۱۳۹۵ تا عددِ فرد، یک عددِ فرد است.
۴) حاصل‌ضرب ۱۳۹۶ تا عددِ زوج، یک عددِ زوج است.
۵) همه‌ی موارد!!

: گزینه (۵) درست است.

نتیجه‌گیری ۳:

هر تعدادی عدد زوج را با هم جمع کنیم، حاصل‌جمع
آن‌ها همواره عددی زوج است.

ز + ز → ز
ز + ز + ز → ز
ز + ز + ز + ز → ز
ز + ز + ز + ز + ز → ز
⋮

نتیجه‌گیری ٤:

هر تعداد زوجی از اعداد فرد را با هم جمع کنیم،
حاصل‌جمع آن ها همواره عددی زوج است.

و هر تعداد فردی از اعداد فرد را با هم جمع کنیم،
حاصل‌جمع آن‌ها همواره عددی فرد است.

ف + ف → ز
ف + ف + ف → ف
ف + ف + ف + ف → ز
ف + ف + ف + ف + ف → ف
⋮

چند تا از عبارت‌های داخل کادر درست است؟

> ۱۳۹۵ تا عدد فرد را با ۱۳۹۵ تا عدد زوج جمع می‌کنیم، حاصل جمع آن‌ها عددی فرد است.
>
> ۱۳۹۶ تا عدد فرد را با ۱۳۹۶ تا عدد زوج جمع می‌کنیم، حاصل‌جمع آن‌ها عددی زوج است.
>
> ۱۳۹۶ تا عدد فرد را با ۱۳۹۵ تا عدد زوج جمع می‌کنیم، حاصل‌جمع آن‌ها عددی فرد است.

۱) هیچی ۲) یکی ۳) دو تا ۴) سه تا

: گزینه (۳). عبارت‌های اول و دوم درستند ولی حاصل‌جمع نهایی در عبارت سوم عددی زوج است.

❑ **بنابراین وقتی مجموعه‌ای از عددها را می‌نویسیم که چند تا عدد با فاصله یا اختلاف یکسانی دارند می‌گوییم دنباله‌ی منظمی را نوشته‌ایم. برای بدست آوردن تعداد اعداد در مجموعه‌های منظم از رابطه‌های زیر می‌توانیم استفاده کنیم.**

❑ **رابطه‌ی ساده "از" و "بین":**

در مجموعه اعدادی که فاصله بین دو عدد فقط یک واحد است از رابطه‌ی: ۱ + (عدد اول − عدد آخر)

استفاده می‌کنیم مثلاً تعداد اعداد در دنباله‌های زیر:

الف) ۱,۲,۳,۴,...,۹۹,۱۰۰ → (۱۰۰ − ۱) + ۱ = ۱۰۰ تا

ب) ۴۱,۴۲,۴۳,...,۸۴,۸۵ → (۸۵ − ۴۱) + ۱ = ۴۵ تا

چنانچه بخواهیم تعداد اعداد بین مجموعه‌های بالا را بدست آوریم باید از رابطه‌ی: ۱ − (عدد اول ـ عدد آخر)

استفاده کنیم مثلاً چند عدد بین عدد اول و عدد آخر دنباله‌های زیر داریم؟

الف) ۱,۲,۳,۴,...,۹۹,۱۰۰ → (۱۰۰ − ۱) − ۱ = ۹۸ تا

ب) ۴۱,۴۲,۴۳,...,۸۴,۸۵ → (۸۵ − ۴۱) − ۱ = ۴۳ تا

❑ **رابطه‌ی تعداد اعداد دنباله‌ی منظم:**

چنانچه فاصله و اختلاف بین دو عدد در یک دنباله‌ی منظم بیش از یک واحد باشد نمی‌توان از فرمول و رابطه‌ی "از" استفاده کرد. رابطه‌ی زیر برای تمام دنباله‌های منظم قابل استفاده است.

$$\text{تعداد اعداد دنباله منظم} = \frac{\text{عدد آخر} - \text{عدد اول}}{\text{فاصله بین دو عدد}} + ۱$$

مثلاً : تعداد اعداد در دنباله‌های منظم زیر:

الف) ۵,۱۰,۱۵,...,۱۱۰,۱۱۵ $\rightarrow \frac{۱۱۵ - ۵}{۵} + ۱ = ۲۳$

ب) ۲,۴,۶,...,۹۸,۱۰۰ $\rightarrow \frac{۱۰۰ - ۲}{۲} + ۱ = ۵۰$ تا

ج) ۱,۳,۵,...,۹۹۷,۹۹۹ $\rightarrow \frac{۹۹۹ - ۱}{۲} + ۱ = ۵۰۰$ تا

د) ۹,۱۲,۱۵,...,۵۱,۵۴ $\rightarrow \frac{۵۴ - ۹}{۳} + ۱ = ۱۶$ تا

❑ مجموع اعداد دنباله منظم:

اگر بخواهیم مجموع اعداد یک مجموعه عددی را بدست آوریم می‌توانیم از رابطه "گاوس " که برگرفته از نام ریاضی‌دان بزرگ "کارل فردریش گاوس" که در قرن ۱۸-۱۷ میلادی می‌زیسته استفاده کنیم. از این رابطه در پایه پنجم به عنوان رابطه‌ی اعداد مثلثی نام برده می‌شود.

$$\text{مجموع اعداد دنباله منظم} = \frac{(\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}) \times \text{تعداد}}{۲}$$

$$\text{رابطه اعداد مثلثی} = \frac{(۱ + \text{شماره شکل}) \times \text{شماره شکل}}{۲}$$

مثلاً مجموع اعداد دنباله‌های زیر به این صورت به‌دست می‌آید:

الف) $۱+۲+۳+...+۹۸+۹۹+۱۰۰ \Rightarrow \frac{۱۰۰\times(۱۰۰+۱)}{۲}=۵۰۵۰$

ب) $۲+۴+۶+...+۱۰۰ \Rightarrow \frac{۵۰\times(۱۰۰+۲)}{۲}=۲۵۵۰$

❑ میانگین اعداد دنباله منظم:

برای بدست آوردن میانگین اعداد یک دنباله به راحتی می‌توانیم از رابطه‌های: $\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}}$

و یا $\frac{\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}}{۲} = \text{میانگین}$ استفاده کنیم.

مثلاً: میانگین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰: $\text{میانگین} = \frac{۱+۵۰}{۲}=۲۵/۵$

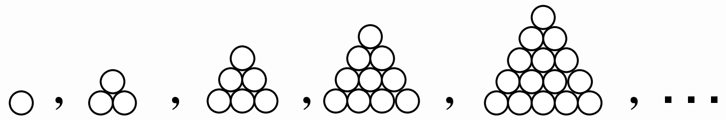
یا میانگین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰: $\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} \frac{۵۰۵۰}{۱۰۰}=۵۰/۵$

حال که با رابطه‌هایی بین اعداد یک مجموعه و دنباله منظم آشنا شدید به سراغ الگوها، انواع آنها و روش‌های کشف رابطه بین آنها بپردازیم. در دانش ریاضی گاهی با تکرار عددها و یا شکل‌ها بصورت قانونمند به روابطی می‌رسیم که موجب پیش‌بینی ادامه‌ی اعداد و شکل‌ها می‌شود که به این حالت «الگو» می‌گوییم.

آشنایی با چند الگوی ویژه:

❑ به اعداد ...، ۱،۳،۶،۱۰،۱۵ «اعداد مثلثی» می‌گوییم. ویژگی مشترک این اعداد در شکل‌های زیر نشان داده شده است:

$$۱ \xrightarrow{+۲} ۳ \xrightarrow{+۳} ۶ \xrightarrow{+۴} ۱۰ \xrightarrow{+۵} ۱۵ \quad , \ ...$$



❑ همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هر «عدد مثلثی»، از حاصل جمع یک سری از اعداد طبیعی متوالی تشکیل شده‌است.

اولین عدد مثلثی برابر با عدد طبیعی «یک» است. — $۱ = ۱$

دومین عدد مثلثی برابر با مجموع دو عدد طبیعی متوالی است. — $۱ + ۲ = ۳$

سومین عدد مثلثی برابر با مجموع سه عدد طبیعی متوالی است. — $۱ + ۲ + ۳ = ۶$

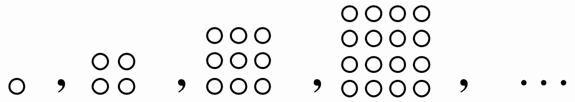
$۱ + ۲ + ۳ + ۴ = ۱۰$

⋮ ⋮

○ اُمین عدد مثلثی برابر با مجموع ○ عدد طبیعی متوالی است. — $۱ + ۲ + ۳ + \ldots + \bigcirc = \dfrac{\bigcirc \times (\bigcirc + ۱)}{۲}$

❑ اگر هر دو عدد «مثلثی» پشت سر هم را با هم جمع کنیم، یک «عدد مثلثی» به وجود می‌آید.

$۱ \xrightarrow{+۳} ۴ \xrightarrow{+۵} ۹ \xrightarrow{+۷} ۱۶ \;,\; \ldots$



❑ همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هر «عدد مربعی»، از حاصل جمع عددهای فرد قبل از خودش تشکیل می‌شود.

اولین عدد مربعی برابر با عدد طبیعی «یک» است. — $۱ = ۱ = ۱ \times ۱$

دومین عدد مربعی برابر با مجموع «دو» عدد فرد متوالی است. — $۱ + ۳ = ۴ = ۲ \times ۲$

سومین عدد مربعی برابر با مجموع «سه» عدد فرد متوالی است. — $۱ + ۳ + ۵ = ۹ = ۳ \times ۳$

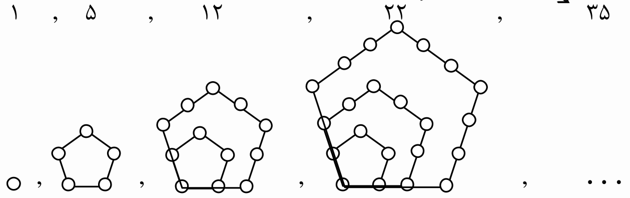
$۱ + ۳ + ۵ + ۷ = ۱۶ = ۴ \times ۴$

⋮ ⋮

○ اُمین عدد مربعی برابر با مجموع ○ عدد فرد متوالی است. — ....$= \bigcirc \times \bigcirc$

❑ ویژگی مشترک اعداد ... , ۱,۵,۱۲,۲۲ عبارت از این است که، می‌توان آنها را به صورت پنج ضلعی، نشان داد.

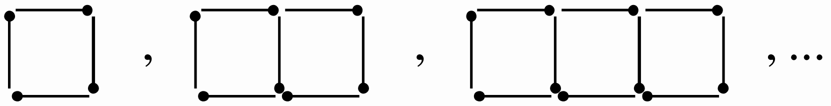
$۱ \xrightarrow{+۴} ۵ \xrightarrow{+۷} ۱۲ \xrightarrow{+۱۰} ۲۲ \xrightarrow{+۱۳} ۳۵ \;,\; \ldots$



در الگوهای شکلی با کشف رابطه بین اشکال از نظر تعداد، رابطه‌ی عددی آن را نوشته و در ادامه پیش‌بینی تعداد شکل‌های رسم شده را در شماره‌های بعدی انجام می‌دهیم. به چند مثال در رابطه‌های شکلی توجه کنید.

رابطه‌های اشکال چوب‌کبریتی:

الف)



(۱) (۲) (۳)

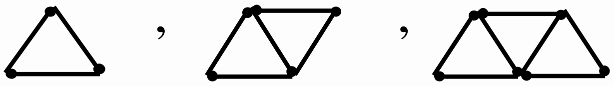
ابتدا تعداد چوب‌کبریت‌ها را در هر شکل شمارش کرده و رابطه‌ی عددی زیر را می‌نویسیم.

شکل ۱ شکل ۲ شکل ۳ شکل ۴

۴ $\xrightarrow{+۳}$ ۷ $\xrightarrow{+۳}$ ۱۰ $\xrightarrow{+۳}$ ۱۳ و ...

سپس یک رابطه عددی برای هر شماره‌ی شکلی که پرسش شود می‌نویسیم. **۱ + (۳ × شماره شکل)**

ب)



شکل (۱) **شکل (۲)** **شکل (۳)**

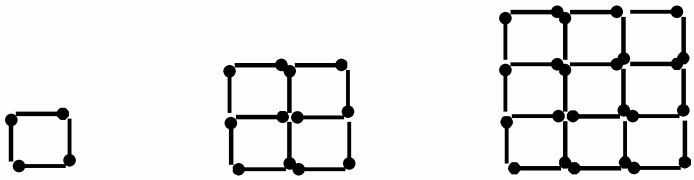
رابطه‌ی عددی پس از شمارش چوب‌کبریت‌ها در هر شکل:

شکل ۱ شکل ۲ شکل ۳ شکل ۴

۳ $\xrightarrow{+۲}$ ۵ $\xrightarrow{+۲}$ ۷ $\xrightarrow{+۲}$ ۹ و ...

پس نتیجه می‌گیریم: **۱ + (۲ × شماره شکل)**

پ)



، ...

شکل (۱) **شکل (۲)** **شکل (۳)**

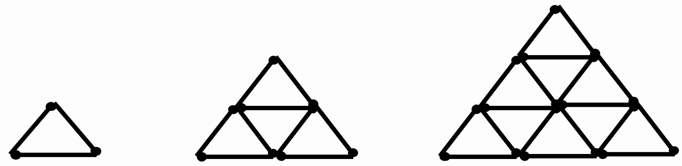
رابطه‌ی تعدادی چوب‌کبریت‌ها در محیط شکل‌ها:

شکل ۱ شکل ۲ شکل ۳ شکل ۴

۴ $\xrightarrow{+۴}$ ۸ $\xrightarrow{+۴}$ ۱۲ $\xrightarrow{+۴}$ ۱۶ و ...

در نتیجه: رابطه‌ی تعداد چوب‌کبریت‌ها در محیط مربع‌ها برابر است با: **(۴ × شماره شکل)**

ت)



، ...

شکل (۱) **شکل (۲)** **شکل (۳)**

رابطه‌ی تعداد چوب‌کبریت‌ها در محیط هر شکل:

شکل ۱ شکل ۲ شکل ۳ شکل ۴

۳ $\xrightarrow{+۳}$ ۶ $\xrightarrow{+۳}$ ۹ $\xrightarrow{+۳}$ ۱۲ و ...

در نتیجه:رابطه‌ی تعداد چوب‌کبریت‌ها در محیط مثلث‌ها (۳ × شماره شکل)

اکثر الگوهای شکلی را می‌توان با همین روش تبدیل به روابط عددی کرد و پس از کشف رابطه‌ها به پرسش‌های مربوطه پاسخ داد.

بخش‌پذیری

❏ اگر یک عدد صحیح را «مقسوم» بر یک عدد صحیح دیگر «مقسوم‌علیه»، تقسیم کنیم، باقی‌مانده می‌تواند از صفر تا یکی کم‌تر از «مقسوم‌علیه» باشد.

مقسوم‌علیه	مقسوم
خارج‌قسمت	
	باقی‌مانده

اگر باقی‌مانده‌ی تقسیمی صفر شد، می‌گوییم «مقسوم» بر «مقسوم‌علیه» بخش‌پذیر است.

❏ مضرب یک عدد:

مضرب‌های طبیعی هر عدد از حاصل‌ضرب عددهای طبیعی در آن عدد به دست می‌آیند. مثلاً مضرب‌های عدد ۳ عبارتند از:

$$1\times ۳ = ۳$$
$$۲\times ۳ = ۶ \quad \rightarrow ۳,۶,۹,۱۲,...$$
$$۳\times ۳ = ۹$$

❏ مقسوم‌علیه‌های (شمارنده‌های) یک عدد:

شمارنده‌های یک عدد یعنی اعدادی که عدد اصلی ما بر آنها بخش‌پذیر است. مثلاً شمارنده‌های عدد ۳۶ عبارتند از:

شمارنده‌های عدد ۳۶ $= \{۱,۲,۳,۴,۶,۹,۱۲,۱۸,۳۶\}$

در ریاضی حرف D نشانه‌ی مجموعه اعداد شمارنده یا همان مقسوم‌علیه‌های یک عدد است. مثلاً $D_{۱۲}$ یعنی:

$$D_{۱۲} = \{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$$

پس عدد ۱۲، شش مقسوم‌علیه دارد.

نکته: کوچک‌ترین شمارنده‌ی هر عدد یک و بزرگ‌ترین شمارنده‌ی آن، خودش است.

نکته: کوچک‌ترین مضرب طبیعی یک عدد خودش است و بزرگ‌ترین مضرب آن نامشخص و تعداد مضرب‌های یک عدد نامحدود است.

❏ کوچک‌ترین مضرب مشترک بین دو عدد:

در خیلی از مسائل و عبارت‌های کسری از کوچک‌ترین مضرب مشترک بین دو عدد استفاده می‌کنیم. مثلاً کوچک‌ترین مضرب مشترک بین دو عدد ۱۲ و ۱۸ عبارت است از:

$$M_{۱۲} = \{۱۲, ۲۴, ۳۶, ۴۸, ۶۰,...\}$$
$$M_{۱۸} = \{۱۸, ۳۶, ۵۴,...\}$$

عدد ۳۶ کوچک‌ترین مضرب مشترک بین دو عدد ۱۲ و ۱۸ است.

❏ اعداد اول:

اعداد اول (یا خسیس) به اعدادی گفته می‌شوند که فقط بر عدد یک و خودشان بخش‌پذیر باشند. این اعداد در ریاضی کاربرد زیادی داشته و می‌توان به کمک آنها اعداد دیگر را تجزیه کرد. در ریاضی اعداد اول را با P نمایش می‌دهند.

$$P = \{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,..\}$$

عدد یک نه اول است و نه مرکب.

"اعداد مرکب" نیز به اعدادی گفته می‌شوند که علاوه بر عدد یک و خودشان، شمارنده‌ی دیگری هم داشته باشند.

همان‌طور که گفتیم می‌توانیم اعداد مرکب را به کمک اعداد اول تجزیه کرده و به‌صورت عددهای توان‌دار نوشت مثلاً:

$$\begin{array}{r|l} ۱۸ & ۲ \\ ۹ & ۳ \\ ۳ & ۳ \\ ۱ & \end{array} \quad \rightarrow \quad ۱۸ = ۲\times۳\times۳ \quad \rightarrow ۱۸ = ۲\times۳^{۲}$$

قواعد بخش‌پذیری و یافتن باقی‌مانده:

❑ **بخش‌پذیری و باقی‌مانده بر ۱:** همه‌ی اعداد بر یک بخش‌پذیرند. اگر عددی را بر یک تقسیم کنیم، خارج قسمت همان عدد و باقی‌مانده صفر می‌شود.

❑ **بخش‌پذیری و باقی‌مانده بر ۲:** اعداد زوج بر ۲ بخش‌پذیرند. باقی‌مانده‌ی هر عدد فرد بر ۲ برابر با یک است.

❑ **بخش‌پذیری و باقی‌مانده بر ۳:** در روش اول کافی‌است مجموع رقم‌ها را بر ۳ تقسیم کنیم. اگر مجموع رقم‌ها عدد بزرگی شد، مجدداً رقم‌های آن را با هم جمع می‌کنیم.

باقی‌مانده‌ی عدد ۹۹۸۹۸ را بر ۳ به دست آورید.

:

$$۹ + ۹ + ۸ + ۹ + ۸ = ۴۳ \rightarrow ۴ + ۳ = ۷ \xrightarrow{\text{باقی‌مانده بر ۳}} = ۱$$

روش دوم (روش خط زدن)

با خط زدن رقم‌های بخش‌پذیر بر عدد ۳ سریعتر به جواب می‌رسیم. اگر دو یا چند رقم نیز جمع آنها بر ۳ بخش‌پذیر بود می‌توانیم آن را خط بزنیم مانند:

$$۱۰۵۷۱۳۹۶ \rightarrow \underbrace{۱\,۰\,۵}_{۱+۵=۶} \quad \underbrace{۷\,۱}_{\downarrow} \quad \underset{۳}{\overset{۳}{\downarrow}} \quad \underset{۹}{\overset{۹}{\downarrow}} \quad \underset{۶}{\overset{۶}{\downarrow}}$$

فقط عدد ۱ و ۷ باقی می‌مانند آن‌ها را جمع و حاصل را بر ۳ تقسیم می‌کنیم.

این عدد بر ۳ بخش‌پذیر نیست و ۲ تا باقی‌مانده دارد.

❑ **بخش‌پذیری و باقی‌مانده بر ۴:** دو رقمِ سمت راستِ عدد را بر ۴ تقسیم می‌کنیم. اگر صفر شد، آن عدد بر ۴ بخش‌پذیر است. و اگر صفر نشد، عددِ به دست آمده، باقی‌مانده‌ی عدد اولیه بر ۴ می‌باشد.

باقی‌مانده‌ی عدد ۹۸۷۶۵۴۳ را بر ۴ به دست آورید.

: دو رقم سمت راست عدد «۴۳» را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۴۳ & ۴ \\ \cline{2-2} -۴۰ & ۱۰ \\ \hline ۳ & \end{array}$$

❑ **بخش‌پذیری و باقی‌مانده بر ۵: اگر رقم یکان عددی «صفر» و یا «پنج» باشد، آن عدد بر ۵ بخش‌پذیر است. اگر رقم یکان عددی ۱,۲,۳,۴ باشد، همان رقم‌ها، باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۵ است. و اگر رقم یکان عددی ۶,۷,۸,۹ باشد، ۵ واحد از رقم یکان کم می‌کنیم تا باقی‌مانده تقسیم به دست آید.**

هر عددی را که بر ۵ تقسیم کنیم می‌تواند باقی‌مانده‌هایی شامل (۴,۳,۲,۱,۰) داشته باشد. مانند تقسیم عددهای زیر بر عدد ۵:

۸۰	۷۹	۷۸	۷۷	۷۶	۷۵	۷۴	۷۳	۷۲	۷۱	۷۰
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
۰	۴	۳	۲	۱	۰	۴	۳	۲	۱	۰

پس در بخش‌پذیری بر عدد ۵، به یکان نگاه می‌کنیم اگر ۰ یا ۵ بود که حتماً بر عدد ۵ بخش‌پذیر است و باقی‌مانده‌ای ندارد. اما اگر یکان عدد ۱، ۲، ۳ و ۴ بود باقی‌مانده‌ی همان یکان است. اگر یکان عدد ۶، ۷، ۸ و ۹ بود هر کدام از آنها را از ۵ کم می‌کنیم باقی‌مانده به‌دست آمده همان باقی‌مانده‌ی تقسیم است.

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} 6 & 7 & 8 & 9 \\ -5 & -5 & -5 & -5 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}}$$

باقی‌مانده‌های یک عدد با یکان ۶ تا ۹ بر عدد ۵

❑ **بخش‌پذیری و باقی‌مانده بر ۶: عددی که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد بر ۶ نیز بخش‌پذیر است. برای یافتن باقی‌مانده، کافی است رقم یکان را با چهار برابر مجموع بقیه‌ی رقم‌ها جمع کنیم و بر ۶ تقسیم کنیم.**

باقی‌مانده‌ی عدد ۱۲۳۴۵ را بر ۶ به دست آورید.

:

$1+2+3+4=10$

$4\times10=40$

$40+5=45$

$$\rightarrow \begin{array}{r|l} 45 & 6 \\ \hline -42 & 7 \\ \hline 3 & \end{array} \longrightarrow$$ باقی‌مانده‌ی ۱۲۳۴۵ بر ۶

❑ **بخش‌پذیری و باقی‌مانده بر ۷: دو برابر رقم یکان را از بقیه‌ی عدد کم می‌کنیم. اگر حاصل صفر و یا مضربی از ۷ باشد، آن عدد بر ۷ بخش‌پذیر است.**

کدام‌یک از اعداد زیر بر ۷ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۴۷ ۲) ۲۹۴ ۳) ۸۸۹ ۴) همه‌ی موارد.

: گزینه (۴) صحیح است.

$147 \rightarrow 14-(2\times7)=0$

$294 \rightarrow 29-(2\times4)=21$

$889 \rightarrow 88-(2\times9)=70$

❑ **بخش‌پذیری و باقی‌مانده بر ۸:** سه رقم سمت راستِ عدد را بر ۸ تقسیم می‌کنیم. اگر صفر شد آن عدد بر ۸ بخش‌پذیر است و اگر صفر نشد، عددِ به دست آمده، باقی‌مانده‌ی عدد اولیه بر ۸ می‌باشد.

حداقل چند واحد از عدد ۷۸۹۴۳۲۱ کم کنیم تا بر ۸ بخش‌پذیر باشد؟

: اگر یک واحد از این عدد کم کنیم، سه رقم سمت راست عدد «۳۲۰» بر ۸ بخش‌پذیر می‌شود.

❑ **بخش‌پذیری و باقی‌مانده بر ۹:** عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع رقم‌های آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد. برای یافتن باقی‌مانده بر ۹ کافی‌است مجموع رقم‌ها را بر ۹ تقسیم کنیم. اگر مجموع رقم‌ها عدد بزرگی شد، مجدداً رقم‌های آن را با هم جمع می‌کنیم.

❑ **بخش‌پذیری و باقی‌مانده بر ۱۰:** اگر رقم یکان عددی صفر باشد، بر ده بخش‌پذیر است. رقم یکان هر عددی باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۱۰ است.

❑ **بخش‌پذیری و باقی‌مانده بر ۱۱:** از سمت راست شروع می‌کنیم و بالای هریک از رقم‌های عدد، یکی در میان «+» و «−» می‌گذاریم. سپس حاصل جمع رقم‌های «+» را منهای حاصل‌جمع رقم‌های «−» می‌کنیم. اگر صفر و یا مضربی از ۱۱ شد، آن عدد بر ۱۱ بخش‌پذیر است و اگر نشد باقی‌مانده را نشان می‌دهد.

توجه: اگر عدد اول این تفریق، کوچک‌تر از عدد دومش بود، به عدد اول ۱۱، ۲۲، ۳۳ ، ... را اضافه می‌کنیم تا عمل تفریق انجام شود.

باقی‌مانده‌ی عدد ۱۴۹۳۸ و ۲۸۷۵ را بر ۱۱ به دست آورید.

:

+−+−+
۱۴۹۳۸ → (۱+۹+۸) − (۴+۳) = ۱۸ − ۷ = ۱۱ → بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

−+−+
۲۸۷۵ → (۸+۵) − (۲+۷) = ۱۳ − ۹ = ۴ → باقی‌مانده بر ۱۱ برابر با ۴ است.

بخش‌پذیری‌های ترکیبی:

❑ **یک عدد را ممکن است بتوانیم به صورت حاصل‌ضرب دو یا چند عدد بنویسیم. در قواعد بخش‌پذیری‌های ترکیبی، عدد را به صورت حاصل‌ضرب دو یا چند عددی می‌نویسیم که مقسوم‌علیه مشترکی به جز یک نداشته باشند. (مثلاً: ۱۲=۳×۴) سپس می‌توان قاعده بخش‌پذیری بر ۱۲ را چنین گفت: عددی بر ۱۲ بخش‌پذیر است که بر ۳ و ۴ بخش‌پذیر باشد.**

درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

	درست	نادرست
الف) عددی بر ۱۴ بخش‌پذیر است که بر ۲ و ۷ بخش‌پذیر باشد.	☐	☐
ب) عددی بر ۱۲ بخش‌پذیر است که بر ۲ و ۶ بخش‌پذیر باشد.	☐	☐
ج) عددی بر ۱۸ بخش‌پذیر است که بر ۳ و ۶ بخش‌پذیر باشد.	☐	☐
د) عددی بر ۲۰ بخش‌پذیر است که بر ۴ و ۵ بخش‌پذیر باشد.	☐	☐

: جمله‌های «الف» و «د» صحیح است. ولی «ب» و «ج» صحیح نیستند. چون در جمله «ب»، ۲ و ۶ و در جمله «ج»، ۳ و ۶ مقسوم‌علیه‌های دیگری به جز یک دارند.

☐ هرگاه عددی را بتوان به صورت حاصل‌ضرب ۲ یا چند عدد دیگر نوشت، عدد اولیه بر همه‌ی این اعداد و حاصل‌ضربشان بخش‌پذیر است.
مثلاً عدد ۳۰ را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب ۵×۳×۲ نوشت. نتیجه می‌گیریم عدد ۳۰ بر ۲ و ۳ و ۵ بخش‌پذیر است. عدد ۳۰ بر ۳×۲ یعنی ۶ و ۵×۳ یعنی ۱۵ و ۵×۲ یعنی ۱۰ نیز بخش‌پذیر است.

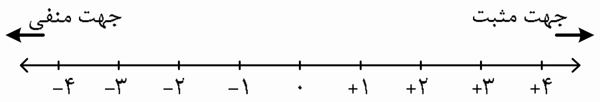
کوچک‌ترین عددی که بر ۲ و ۳ و ۴ بخش‌پذیر است را به دست آورید. بزرگ‌ترین عددی که این ویژگی را داشته باشد را نیز به دست آورید.

: کوچک‌ترین ۱۲ است ولی بزرگ‌ترین نامشخص می‌باشد.

☐ اگر دو عدد دلخواه بر یک عدد معین بخش‌پذیر باشند، حاصل‌جمع و تفریق و ضرب آن دو عدد نیز بر عدد معین بخش‌پذیر می‌باشد. مثلاً ۷۲ و ۶۸ هر دو بر ۴ بخش‌پذیرند. پس ۶۸ + ۷۲ و ۶۸ − ۷۲ و ۶۸ × ۷۲ نیز بر ۴ بخش‌پذیرند.

اعداد صحیح

☐ اعداد علامت‌دارِ ...,۳+,۲+,۱+,۰,۱−,۲−,۳−,... را اعداد صحیح می‌گوییم. هریک از اعداد ۱+ و ۲+ و ۳+ و ... یک عدد صحیح مثبت و هریک از اعداد ۱− و ۲− و ۳− و ... یک عدد صحیح منفی می‌باشند. عدد صفر، نه مثبت است و نه منفی. عددهای صحیح را روی محور به صورت زیر نمایش می‌دهیم:



هرچه به طرف راست حرکت کنیم اعداد بزرگ‌تر و هرچه به طرف چپ حرکت کنیم، اعداد کوچک‌ترند. طبق قرارداد، اگر علامت عددی را نگذاریم، یعنی آن عدد مثبت است. یعنی: ۳ = ۳+

بین اعداد زیر علامت (< , = , >) مناسب قرار دهید.

۰ ◯ ۲− ۱− ◯ ۴− ۵+ ◯ ۱− ۱۱۲− ◯ ۱۱−

: ۰ > ۲− ۱− > ۴− ۵+ > ۱− ۱۱۲− < ۱۱−

☐ قرینه‌ی یک عدد صحیح را با علامتِ ( )− نشان می‌دهیم. مثلاً می‌نویسیم: (۲−)− و می‌خوانیم: قرینه‌ی عددِ ۲−
قرینه‌ی یک عدد صحیح را با عوض کردن علامتِ آن، به دست می‌آوریم. مثلاً قرینه‌ی ۵− ، می‌شود ۵+ و به صورت روبه‌رو نشان می‌دهیم: ۵+ = (۵−)−

☐ قرینه‌ی قرینه‌ی هرعدد، همان عدد می‌شود: ۲+ = [(۲+)−]−

☐ جمع و تفریق با استفاده از محور اعداد:

۵+ = (۴+) + (۱+) یا ۵ = ۴ + ۱